Revista Brasileira de Ensino de Física `https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2022-0045`

"Material Suplementar para Yang-Mills-Shaw e as equações de Maxwell não-Abelianas"

Apêndice A

1. Setor de Dirac massivo

Neste apêndice vamos contruir o setor de Dirac massivo a partir dos setores de Weyl Left-Handed, construído previamente, e do setor de Weyl Right-Handed. Como já mencionamos anteriormente, quando o autovalor do operador helicidade de uma dada partícula é $-\hbar/2$, esta partícula é chamada de mão direita (ou partícula Right-Handed). Desta forma, ao procedermos de maneira análoga ao que foi feito na seção III deste trabalho, mas agora para uma partículas de mão direita, obtemos a equação de Weyl para férmions Right-Handed como sendo

$$\left(i\hbar\partial_t - i\hbar c\vec{\sigma}\cdot\nabla\right)\chi = 0, \tag{1}$$

com χ dado por

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_1(t,\vec{x}) \\ \chi_2(t,\vec{x}) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Note, portanto, que as equações (12) e [1] são inteiramente desacopladas, mas nada nos impede de as escrever de uma maneira mais compacta. Para tal, definiremos o seguinte objeto Ψ como

$$\Psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Perceba que Ψ possui quatro componentes, as duas primeiras localizadas no setor left e as duas últimas localizadas no setor right. Dessa maneira, é conveniente que definamos, em notação indicial, ξ_a com $a = (1,2)$ e $\chi_{\dot{a}}$ com $\dot{a} = (1,2)$. Para o espinor completo Ψ associaremos um índice grego, Ψ_α com $\alpha = (1,2,3,4)$, de modo que as componentes 1 e 2 estão associadas ao setor left enquanto que as componentes 3 e 4 ao setor right.

A fim de compactar os dois setores de Weyl em uma expressão única, vamos definir as seguintes matrizes:

$$\gamma_t = \begin{pmatrix} 0 & \hat{I}_2 \\ \hat{I}_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

sendo $\hat{I}_2$ a matriz identidade de ordem 2. Agora veja que estas matrizes acima definidas possuem as seguintes propriedades:

$$\gamma_t : \begin{cases} \gamma_t^2 = \hat{I}_4 \\ \gamma_t^\dagger = \gamma_t \\ \gamma_t^{-1} = \gamma_t \end{cases} \quad \text{e} \quad \gamma_i : \begin{cases} \gamma_i^2 = -\hat{I}_4 \\ \gamma_i^\dagger = -\gamma_i \\ \gamma_i^{-1} = -\gamma_i \end{cases}. \tag{5}$$

É possível e fácil mostrar também que, $\gamma_t\gamma_i = -\gamma_i\gamma_t$ e que $\gamma_i\gamma_j = -\gamma_j\gamma_i$, sempre que $i \neq j$. O leitor já mais experiente percebe então que as matrizes gama obedecem uma álgebra de Clifford [2, 1], tal como as matrizes de Pauli. Com as definições acima podemos escrever as equações de Weyl, para ambos os setores, de maneira unificada como

$$\left(i\hbar\gamma_0\partial_t + i\hbar c\vec{\gamma}\cdot\nabla\right)\Psi = 0, \tag{6}$$

ou ainda

$$\begin{pmatrix} 0 & i\hbar\partial_t - i\hbar c\vec{\sigma}\cdot\nabla \\ i\hbar\partial_t + i\hbar c\vec{\sigma}\cdot\nabla & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} = 0, \tag{7}$$

com $\gamma_0 = \gamma_t$. A definição da matriz γ_0 é importante para que seja possível unificar a notação, isto é, podemos escrever γ_μ com $\mu = (0, 1, 2, 3)$, de modo que a álgebra de Clifford, expressa através da relação de anticomutação

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu}, \tag{8}$$

com $\eta_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1)$, torna-se evidente.

É importante destacar aqui que, as equações de Weyl e sua descrição unificada nos levam naturalmente a construção de uma álgebra de Clifford que exibe uma métrica $\eta_{\mu\nu}$ que identificamos como sendo a métrica de Minkowski [3]. Discutindo ainda um pouco mais a álgebra associada às matrizes gama, podemos definir ainda uma quinta matriz γ_5 como

$$\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3. \tag{9}$$

Veja então que, através de um cáculo direto é possível mostrar algumas propriedades importantes relacionadas à matriz γ_5, tais como:

$$\gamma_5 : \begin{cases} \gamma_5^2 = \hat{I}_4 \\ \gamma_5^\dagger = \gamma_5 \\ \{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0 \end{cases}. \tag{10}$$

As propriedades da matriz γ_5 acima listadas nos permitem construir um operador importante, o chamado operador projeção P. Este operador, escrito como

$$P_\pm = \frac{1 \pm \gamma_5}{2}, \tag{11}$$

é tal que $P_\pm^2 = P_\pm$ (operador idempotente), $P_+P_- = 0$ e $P_+ + P_- = \hat{I}_4$. Tais propriedades nos permitem ver que um dado espinor Ψ qualquer pode sempre ser escrito como

$$\Psi = (P_+ + P_-)\Psi = \Psi_+ + \Psi_-. \tag{12}$$

A decomposição do espinor em Ψ_+ e Ψ_- está, portanto, ligada justamente aos setores left e right, isto é, à ideia de quiralidade. É importante também ressaltar que as matrizes gama como apresentadas em (12) são ditas estarem na representação de Weyl. Para mais detalhes acerca das representações das matrizes gama vide [4].

Finalmente podemos então iniciar a discussão sobre a inclusão da massa no setor fermiônico. Para tal note que os setores left e right têm suas quiralidades trocadas mediante atuação das matrizes gama, ou seja,

$$\gamma_0 \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi \\ \xi \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$\gamma_i \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_i\chi \\ \sigma_i\xi \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Além disso, veja que os dois termos presentes na equação de Weyl têm dimensão de energia, de modo que caso queiramos adicionar um termo extra de energia, tipo mc^2 devemos respeitar a quiralidade, isto é,

$$\begin{pmatrix} 0 & i\hbar\partial_t - i\hbar c\vec{\sigma}\cdot\nabla \\ i\hbar\partial_t + i\hbar c\vec{\sigma}\cdot\nabla & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Mc^2\xi \\ \tilde{M}c^2\chi \end{pmatrix} = 0. \tag{15}$$

Quando $M = \tilde{M}$ obtemos exatamente a equação de Dirac.

Referências

[1] J. Vaz Jr. e R. Rocha Jr., *Álgebras de Clifford e Espinores* (Livraria da Física, São Paulo, 2012).
[2] J. Furtado e J.A. Helayel-Neto, Revista Brasileira de Ensino de Física **43**, e20200338 (2021).
[3] A.N. Rocha, B.F. Rizzuti e D.S. Mota, Revista Brasileira de Ensino de Física **35**, 4304 (2013).
[4] L.H. Ryder, *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1996).