Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 42, 2020

Supplementary Material to "Uma introdução às estrelas estranhas"

Apêndice B - Equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff

A equação TOV é derivada a partir das equações de Einstein para o campo gravitacional [9,10] e dadas por (em unidades geométricas, onde $c = G = 1$ e G é a constante gravitacional)

$$G_{\mu\nu} = -8\pi T_{\mu\nu} \, . \tag{1}$$

O tensor métrico, presente no tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$, pode ser obtido a partir do elemento de linha, que para uma estrela esfericamente simétrica e estática é dado por

$$\mathrm{d}s^2 = e^{2\nu(r)}\mathrm{d}t^2 - e^{2\lambda(r)}\mathrm{d}r^2 - r^2[\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2] \, , \tag{2}$$

tal que, com $\nu \equiv \nu(r)$ e $\lambda \equiv \lambda(r)$ temos

$$\begin{aligned} g_{00} &= e^{2\nu} \, ; & g_{11} &= -e^{2\lambda} \, ; \\ g_{22} &= -r^2 \, ; & g_{33} &= -r^2 \sin^2\theta \, . \end{aligned}$$

Os símbolos de Christoffel são definidos a partir da métrica pela expressão a seguir

$$\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\gamma\alpha} \left(\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu} \right) \, . \tag{3}$$

Como o tensor métrico é diagonalizado, só temos termos não nulos quando $\gamma = \alpha$, assim

$$\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\gamma\gamma} \left(\partial_\mu g_{\gamma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\gamma} - \partial_\gamma g_{\mu\nu} \right) \, , \tag{4}$$

o que resulta nos seguintes termos não nulos

$$\begin{aligned} &\Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{01} = \nu' \, , & &\Gamma^1_{00} = \nu' e^{2(\nu-\lambda)} \, , & &\Gamma^1_{11} = \lambda' \, , \\ &\Gamma^1_{22} = -r e^{-2\lambda} \, , & &\Gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta e^{-2\lambda} \, , & &\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r} \, , \\ &\Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta \, , & &\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r} \, , & &\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot\theta \, , \end{aligned}$$

onde a linha denota a derivada parcial com relação à r.

O tensor da curvatura de Riemann, na sua forma covariante, pode ser obtido a partir dos símbolos de Christoffel, sendo dado por

$$\begin{aligned} R_{\delta\gamma\mu\nu} &= g_{\delta\mu} R^{\alpha}_{\gamma\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\gamma\partial_\mu g_{\delta\nu} + \partial_\delta\partial_\nu g_{\delta\mu} - \partial_\delta\partial_\mu g_{\gamma\nu}) + g_{\beta\eta}(\Gamma^{\beta}_{\gamma\mu}\Gamma^{\eta}_{\delta\nu} - \Gamma^{\beta}_{\gamma\nu}\Gamma^{\eta}_{\delta\mu}) \, . \end{aligned} \tag{5}$$

Portanto, o tensor de Ricci, que é definido por

$$R_{\gamma\mu} = g^{\delta\nu} R_{\delta\mu\gamma\nu} \, , \tag{6}$$

possui as seguintes componentes diagonais (as restantes são nulas por causa do tensor métrico):

- $$R_{00} = g^{00} R_{0000} + g^{11} R_{1001} + g^{22} R_{2002} + g^{33} R_{3003} \, , \tag{7}$$

onde

$$R_{0000} = 0 \, , \tag{8}$$

$$R_{1001} = R_{0110} = (\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda')e^{\nu} \, , \tag{9}$$

$$R_{2002} = R_{0220} = r\nu' e^{2(\nu-\lambda)} \, , \tag{10}$$

$$R_{3003} = R_{0330} = r\sin^2\theta\,\nu' e^{2(\nu-\lambda)} \, , \tag{11}$$

logo,

$$R_{00} = \left(\nu'' - \nu'^2 + \nu'\lambda' - 2\frac{\nu'}{r}\right) e^{2(\nu-\lambda)} \,. \tag{12}$$

- $$R_{11} = g^{00}R_{0110} + g^{11}R_{1111} + g^{22}R_{2112} + g^{33}R_{3113} \,, \tag{13}$$

com R_{0110} já calculado, temos

$$R_{1111} = 0 \,, \tag{14}$$
$$R_{2112} = R_{1221} = r\lambda' \,, \tag{15}$$
$$R_{3113} = R_{1331} = r\sin^2\theta\ \lambda' \,, \tag{16}$$

logo,

$$R_{11} = \nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' - 2\frac{\lambda'}{r} \,. \tag{17}$$

- $$R_{22} = g^{00}R_{0220} + g^{11}R_{1221} + g^{22}R_{2222} + g^{33}R_{3223} \,, \tag{18}$$

com R_{0220} e R_{1221} já calculados e $R_{2222} = 0$, temos

$$R_{3223} = R_{2332} = r^2\sin^2\theta(1 - e^{-2\lambda}) \,, \tag{19}$$

assim

$$R_{22} = (r\nu' - r\lambda' + 1)e^{-2\lambda} - 1 \,. \tag{20}$$

- $$R_{33} = g^{00}R_{0330} + g^{11}R_{1331} + g^{22}R_{2332} + g^{33}R_{3333} \,, \tag{21}$$

como $R_{3333} = 0$ e com os outros coeficientes já calculados anteriormente, chegamos a

$$R_{33} = R_{22}\sin^2\theta = [(r\nu' - r\lambda' + 1)e^{-2\lambda} - 1]\sin^2\theta \,. \tag{22}$$

A partir do tensor de Ricci, somos capazes de determinar o escalar de Ricci, tal que

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \,, \tag{23}$$

o que fornece

$$R = 2\left(-\nu'' - \nu'^2 + \nu'\lambda' - 2\frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) e^{-2\lambda} + \frac{2}{r^2} \,. \tag{24}$$

Assim, podemos obter o lado esquerdo das equações de Einstein, isto é, o tensor de Einstein, que na sua forma mista é dado por

$$G^\mu_\nu = R^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu R \,, \tag{25}$$

onde δ^μ_ν é a delta de Kronecker, que possui valor igual a um quando $\mu = \nu$ e zero para $\mu \neq \nu$. Portanto, temos

$$G^0_0 = \left(\frac{1}{r^2} - 2\frac{\lambda'}{r}\right) e^{-2\lambda} - \frac{1}{r^2} \,, \tag{26}$$
$$G^1_1 = \left(\frac{1}{r^2} + 2\frac{\nu'}{r}\right) e^{-2\lambda} - \frac{1}{r^2} \,, \tag{27}$$
$$G^2_2 = G^3_3 = \left(\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' + \frac{\nu' - \lambda'}{r}\right) e^{-2\lambda} \,. \tag{28}$$

O lado direito da equação de Einstein é obtido ao considerarmos que a estrela é composta por um fluido ideal e isotrópico, sendo assim, o tensor energia-*momentum* na sua forma mista é escrito

$$T^\mu_\nu = (\epsilon + p)u^\mu u_\nu - p\delta^\mu_\nu \,, \tag{29}$$

onde u^μ é o quadrivetor velocidade ou quadrivelocidade do fluido. Desta forma, no referencial de repouso do fluido $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Por isso, temos

$$T^0_0 = \epsilon \,,\ T^1_1 = T^2_2 = T^3_3 = -p \,. \tag{30}$$

A partir da aplicação dos tensores G^μ_ν e T^μ_ν na Eq. (1), obtemos as seguintes relações

$$\left(\frac{1}{r^2} - \frac{2\lambda'}{r}\right) e^{-2\lambda} - \frac{1}{r^2} = -8\pi\epsilon(r)\,, \tag{31}$$

$$\left(\frac{1}{r^2} + \frac{2\nu'}{r}\right) e^{-2\lambda} - \frac{1}{r^2} = 8\pi p(r)\,, \tag{32}$$

$$\left(\nu'' + \nu'^2 - \lambda'\nu' + \frac{\nu' - \lambda'}{r}\right) e^{-2\lambda} = 8\pi p(r)\,. \tag{33}$$

Podemos relacionar $e^{2\lambda}$ com a massa da estrela já que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\left(1 - e^{-2\lambda}\right)\right] = 1 - e^{-2\lambda} + 2r\,\lambda' e^{-2\lambda}\,, \tag{34}$$

o que, multiplicando os dois lados da equação por r^{-2}, resulta em

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\left(1 - e^{-2\lambda}\right)\right] = -\left[e^{-2\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{2\lambda'}{r}\right) - \frac{1}{r^2}\right]\,. \tag{35}$$

Assim, a partir da Eq. (31), temos

$$8\pi\epsilon(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\left(1 - e^{-2\lambda}\right)\right]\,, \tag{36}$$

ou, multiplicando por r^2 e integrando, temos

$$8\pi\int_0^r r'^2\epsilon(r')\mathrm{d}r' = r(1 - e^{-2\lambda})\,. \tag{37}$$

Isolando $e^{-2\lambda}$ temos

$$e^{-2\lambda} = 1 - \frac{8\pi}{r}\int_0^r r'^2\epsilon(r')\mathrm{d}r'\,. \tag{38}$$

Como a relação entre massa e raio no interior da estrela é descrita por

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2\epsilon(r)\,, \tag{39}$$

que na sua forma integral fica

$$m(r) = 4\pi\int_0^r r'^2\epsilon(r')\mathrm{d}r'\,, \tag{40}$$

podendo ser associada com a Eq. (41), tal que

$$e^{2\lambda} = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1}\,. \tag{41}$$

Ainda pela Eq. (31), podemos isolar λ', o que resulta em

$$\lambda' = \frac{1}{2r}\left\{1 - e^{2\lambda}\left[1 - 8\pi r^2\epsilon(r)\right]\right\}\,. \tag{42}$$

Na Eq. (32), podemos isolar ν', obtendo

$$\nu' = \frac{1}{2r}\left\{e^{2\lambda}\left[8\pi r^2 p(r) + 1\right] - 1\right\}\,. \tag{43}$$

A fim de resolvermos Eq. (33), devemos calcular, a partir da Eq. (43), ν'^2 e ν'', além do produto $\nu'\lambda'$ e da diferença $(\nu' - \lambda')/r$. Após cálculos diretos, porém longos, chegamos aos seguintes resultados:

$$\nu'^2 = e^{4\lambda}\left[16\pi^2 r^2 p^2(r) + 4\pi p(r) + \frac{1}{4r^2}\right] - e^{2\lambda}\left[4\pi p(r) + \frac{1}{2r^2}\right] + \frac{1}{4r^2}\,, \tag{44}$$

$$\nu'' = e^{4\lambda}\left[32\pi^2 r^2\epsilon(r)p(r) + 4\pi\epsilon(r) - 4\pi p(r) - \frac{1}{2r^2}\right] + e^{2\lambda}[4\pi r p'(r) + 8\pi p(r)] + \frac{1}{2r^2}\,, \tag{45}$$

$$\nu'\lambda' = e^{4\lambda}\left[16\pi^2 r^2 p(r)\epsilon(r) + 2\pi\epsilon(r) - 2\pi p(r) - \frac{1}{4r^2}\right] + e^{2\lambda}\left[2\pi p(r) - 2\pi\epsilon(r) + \frac{1}{2r^2}\right] - \frac{1}{4r^2}\,, \tag{46}$$

$$\frac{\nu' - \lambda'}{r} = e^{2\lambda}\left[4\pi p(r) - 4\pi\epsilon(r) + \frac{1}{r^2}\right] - \frac{1}{r^2}\,. \tag{47}$$

Substituindo os resultados acima na Eq. (33), agrupando os termos e simplificando-os, temos

$$\{e^{2\lambda}[8\pi r^2 p(r) + 1] - 1\}[\epsilon(r) + p(r)] + 2r\, p'(r) = 0\,. \tag{48}$$

Isolando $p'(r) = \mathrm{d}p/\mathrm{d}r$ e utilizando o resultado obtido na Eq. (41), finalmente, chegamos à equação TOV em unidades geométricas, dada por

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -\frac{m(r)\epsilon(r)}{r^2}\left[1 + \frac{p(r)}{\epsilon(r)}\right]\left[1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{m(r)}\right]\left[1 - \frac{2m(r)}{r}\right]^{-1}\,. \tag{49}$$