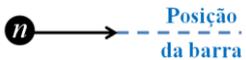


**Material Suplementar para “Uma maquete da estrutura em treliças simples triangulares para o ensino de estática”**

**APÊNDICE A - Cálculo das forças nas barras pelo método dos nós**

Apresentamos aqui o cálculo das forças atuantes nas barras pelo método dos nós para a situação ilustrada na Figura 4. No método dos nós, as barras e os nós são tratados como corpos diferentes. Para análise dos efeitos de tração e compressão das forças aplicadas sobre as barras, levaremos em conta a convenção de sinais indicada na Tabela 1 e complementada na Tabela A.1 com a reação dessas forças sobre os nós.

**Tabela A.1.** Convenção de sinais adotada para os efeitos da força de ação que atua sobre a barra e para reação da força atuante no nó.

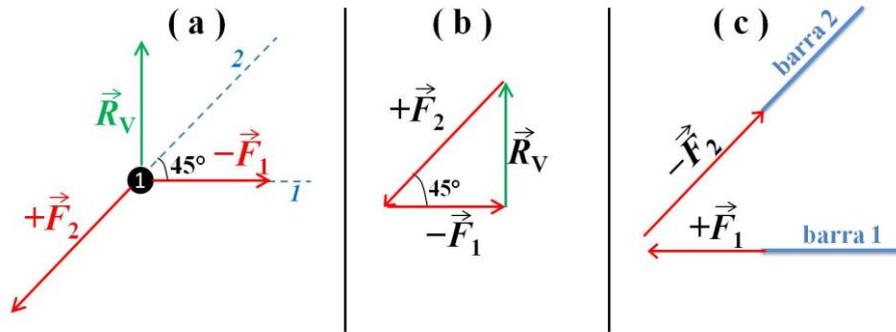
Efeito sobre a barra	Ação na barra		Reação no nó	
	Esquema	Força na barra	Esquema	Força no nó
Tração		$+\overrightarrow{F_b}$		$-\overrightarrow{F_b}$
Compressão		$-\overrightarrow{F_b}$		$+\overrightarrow{F_b}$

Como descrito na seção 3, a estrutura em treliça deste trabalho satisfaz a condição isostática e a força de reação de apoio na vertical no ponto A ( $\vec{R}_{vA}$ ) e a força de reação de apoio na vertical no ponto B ( $\vec{R}_{vB}$ ) são iguais,  $\vec{R}_{vA} = \vec{R}_{vB} = \vec{R}_v$ , tal que,

$$R_v = \frac{P}{2}, \tag{A.1}$$

em módulo ( $|\vec{R}_v| = R_v$ ).

No método dos nós, devemos indicar as forças de reações devido ao contato nos nós. Na Figura A.1 (a) estão ilustradas as forças de reações atuantes no nó 1, que se encontra sobre o ponto A (ver Figura 4), em que a força indicada em verde é a conhecida e em vermelho àquelas a determinar.



**Figura A.1.** (a) Representação do diagrama de forças de reações que atuam no nó 1. Em verde a força conhecida, em vermelho aquelas a determinar e em linhas tracejadas azuis as direções das barras. (b) Representação poligonal das forças de reação que atuam no nó 1, assegurando uma situação de equilíbrio. (c) Representação das forças de ação  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  atuantes sobre barra 1 e sobre a barra 2, respectivamente.

Na Figura A.1(a), as linhas tracejadas indicam a posição das barras 1 e 2 em relação ao nó 1, a configuração de forças apresentada é aquela que estabelece o equilíbrio e os sinais + e - explicitam efeito de compressão ou tração de acordo com a convenção destacada na Tabela A.1. Na Figura A.1(b) há um diagrama em polígonos das forças de reação no nó 1, indicando o equilíbrio das forças sobre o nó 1.

Calculemos as intensidades das forças atuantes sobre a barra 1 ( $F_1$ ) e sobre a barra 2 ( $F_2$ ). Para isso, vamos analisar o equilíbrio das forças na direção vertical e horizontal, de acordo com as projeções das forças envolvidas e em seu menor ângulo de determinação.

Para o nó 1, a soma das projeções das forças na vertical é

$$R_v + F_2 \cdot \text{sen}(45^\circ) = 0 \Rightarrow F_2 = \frac{-\sqrt{2}}{2}P, \text{ (compressão)} \quad (\text{A.2})$$

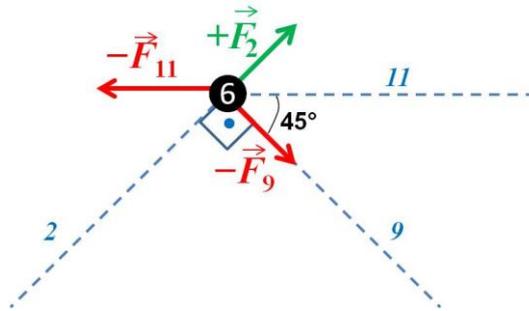
em que fizemos o uso do resultado da Equação (A.1) e do fato que a projeção de  $+\vec{F}_1$  é nula nessa direção. Para direção horizontal, temos

$$+F_2 \cdot \text{cos}(45^\circ) - F_1 = 0 \Rightarrow F_1 = \frac{+1}{2}P, \text{ (tração)} \quad (\text{A.3})$$

em que fizemos o uso do resultado da Equação (A.2). A representação das forças ação sobre as barras,  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  e os seus efeitos, indicados pelos sinais, estão ilustradas na Figura A.1(c).

Os cálculos subsequentes serão semelhantes, a considerar sempre o nó anterior calculado. Assim, teremos sempre duas incógnitas em cada nó.

No nó 6 estão as forças de reação das barras 2, 9 e 11 e a configuração geométrica dessas forças, em relação ao nó 6, está ilustrada na Figura A.2.



**Figura A.2.** Representação das forças de reação que atuam no nó 6. Em verde a força conhecida, em vermelho aquelas a determinar e em linhas tracejadas azuis as direções das barras.

Na situação ilustrada na Figura A.2, a condição de equilíbrio das projeções das forças na direção vertical sobre o nó 6 estabelece que

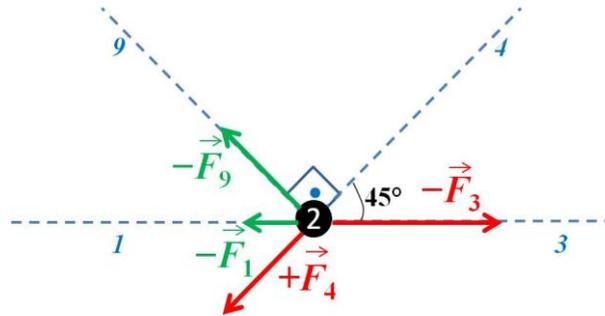
$$-F_9 \cdot \text{sen}(45^\circ) + F_2 \cdot \text{sen}(45^\circ) = 0 \Rightarrow F_9 = \frac{+\sqrt{2}}{2} P. \quad (\text{tração}) \quad (\text{A.4})$$

Na Equação A.4, o resultado da Equação A.2 foi utilizado e também foi levado em conta do fato da projeção de  $\vec{F}_{11}$  ser nula nessa direção. Para a direção horizontal,

$$-F_{11} + F_2 \cdot \text{cos}(45^\circ) + F_9 \cdot \text{cos}(45^\circ) = 0 \Rightarrow F_{11} = -P, \quad (\text{compressão}) \quad (\text{A.5})$$

em que fizemos o uso do resultado da Equação (A.2) e a Equação (A.4).

No nó 2 estão as reações das forças sobre as barras 1, 3, 4 e 9. A Figura A.3 representa a configuração geométrica dessas forças para que no nó 2 elas estejam em equilíbrio.



**Figura A.3.** Representação das forças de reação que atuam no nó 2. Em verde as forças conhecidas, em vermelho aquelas a determinar e em linhas tracejadas azuis as direções das barras.

A condição de equilíbrio das forças de reação na vertical sobre o nó 2,

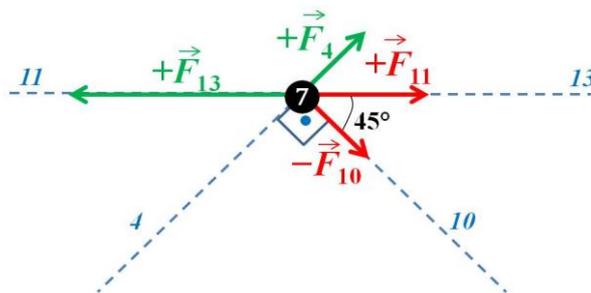
$$F_9 \cdot \text{sen}(45^\circ) - F_4 \cdot \text{sen}(45^\circ) = 0 \Rightarrow F_4 = \frac{-\sqrt{2}}{2}P, \quad (\text{compressão}) \quad (\text{A.6})$$

em que fizemos o uso do resultado da Equação (A.4) e de que as projeções das forças  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_3$  são nulas nessa direção. A condição de equilíbrio das forças na horizontal para o nó 2,

$$-F_1 - F_4 \cdot \text{cos}(45^\circ) - F_9 \cdot \text{cos}(45^\circ) + F_3 = 0 \Rightarrow F_3 = \frac{+3}{2}P, \quad (\text{tração}) \quad (\text{A.7})$$

em que fizemos o uso do resultado da Equação (A.3), Equação (A.4) e Equação (A.6).

No nó 7 estão as reações das barras 4, 10, 11 e 13. A Figura A.4 representa a configuração geométrica de forças de reação possível para que no nó 7 em situação de equilíbrio.



**Figura A.4.** Representação das forças de reação que atuam no nó 7. Em verde as forças conhecidas, em vermelho aquelas a determinar e em linhas tracejadas azuis as direções das barras.

Com a condição de equilíbrio das projeções das forças de reação na vertical para o nó 7 é

$$F_4 \cdot \text{sen}(45^\circ) - F_{10} \cdot \text{sen}(45^\circ) = 0 \Rightarrow F_{10} = \frac{+\sqrt{2}}{2}P, \quad (\text{tração}) \quad (\text{A.8})$$

fazendo uso do resultado da Equação (A.6) e que as projeções das forças  $\vec{F}_{11}$  e  $\vec{F}_{13}$  são nulas nessa direção. Para a condição de equilíbrio das forças na horizontal para o nó 7, usando a Equação (A.5), a Equação (A.6) e a Equação (A.8), temos

$$-F_{13} + F_4 \cdot \cos(45^\circ) - F_{10} \cdot \cos(45^\circ) - F_{11} = 0 \Rightarrow F_{13} = -2P. \text{ (compressão)} \quad (\text{A.9})$$

Devido à simetria da estrutura e da distribuição de carga, os cálculos e análises das demais forças sobre as barras são semelhantes e podem ser apreciadas na Tabela 2.