

Material Suplementario para “La relación entre el tamaño terrestre y la curvatura del horizonte: su determinación con un dispositivo construido para una clase a distancia”

APENDICE

Análisis matemático

Cálculo del radio r (desde el eje terrestre hasta el horizonte del observador, en plano paralelo al plano horizontal que contiene al punto P1 o P2 en figura 6 o 7).

Considerando la figura 1 puede verse (considerando esférica a la Tierra)

$$\frac{R+h}{R} = \frac{R}{c} \quad (1)$$

(R es el radio terrestre, h la altura hasta el observador en su vertical local, c es la distancia del centro de la Tierra al plano paralelo mencionado que contiene al horizonte, y al punto P_1 en la figura 9; también se corresponde al radio terrestre menos la distancia x en dicha figura).

Por otro lado

$$c = \sqrt{R^2 - r^2} \quad (2)$$

se observa en figuras 1 y 9 (c desde el centro de la Tierra hasta el plano anterior y r es el radio del casquete grisado en la figura 1).

De ahí resulta

$$\frac{R+h}{R} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} \quad (3)$$

De donde se obtiene

$$r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R^2}{R+h}\right)^2} \quad (4)$$

Cálculo de d (distancia al horizonte desde el ojo del observador).

$$d^2 = (R + h)^2 - R^2 \quad (5)$$

Desarrollando queda

$$d = \sqrt{2Rh + h^2} \quad (6)$$

Determinación de x (distancia en la vertical del observador desde la superficie terrestre hasta el plano donde se mide el radio r). De figura 8 planteamos

$$\frac{l}{d} = \operatorname{tg} \alpha \quad (7)$$

Luego tenemos

$$(h + x)^2 = d^2 - r^2 \quad (8)$$

Esto puede verse en la figura 9, recordando que d va desde el observador (O) hasta el punto P_2 en el horizonte

$$x = \sqrt{d^2 - r^2} - h \quad (9)$$

Por otro lado, considerando el giro según la situación de la figura 2 (derecha), se define el punto P_3 . Entre éste y el observador (O) se genera una recta; su ángulo respecto al plano anterior es δ (figura 9). Puede verse que

$$\delta = \operatorname{arctg} \left(\frac{h+x}{r+p} \right) \quad (10)$$

En el plano paralelo al horizontal se tiene (ver figuras 8 y 9)

$$(r + p)^2 = l^2 + r^2 \quad (11)$$

Despejando p de (11) junto a x de (9) se reemplazan en δ y operando se obtiene

$$\delta = \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{d^2 - r^2}{l^2 + r^2}} \right) \quad (12)$$

Luego, para obtener γ (ver figura 9) planteamos

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \tau = \frac{\pi}{2} - \left[\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) + \gamma \right] \quad (13)$$

De donde, el ángulo γ que nos interesa medir experimentalmente resulta

$$\gamma = \varepsilon - \delta \quad (14)$$

Recuperando las expresiones de r y d obtenemos

$$\varepsilon = \arccos\left(\frac{r}{d}\right) = \arccos\sqrt{\left[\frac{R^2 - \left(\frac{R^2}{R+h}\right)^2}{2Rh+h^2}\right]} \quad (15)$$

Reemplazando d en δ , (6) en (12)

$$\delta = \arctg\left[\frac{\sqrt{(2Rh+h^2)-r^2}}{\sqrt{l^2+r^2}}\right] \quad (16)$$

En la anterior se reemplaza r de (4) y l , obteniéndose esta última de (7) reemplazando previamente de (6) en dicha ecuación. Con esto resulta

$$\delta = \arctg\left[\sqrt{\frac{(2Rh+h^2) - \left(R^2 - \left(\frac{R^2}{R+h}\right)^2\right)}{(tg^2\alpha).(2Rh+h^2) + \left[R^2 - \left(\frac{R^2}{R+h}\right)^2\right]}}\right] \quad (17)$$

Finalmente γ se obtiene reemplazando (15) y (17) en (14). Expresado en función del radio del planeta R , la altura del observador h y el ángulo barrido α

$$\gamma = \arccos\left(\frac{R^2 - \left(\frac{R^2}{R+h}\right)^2}{2Rh+h^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \arctg\left[\left(\frac{2Rh+h^2 - R^2 + \left(\frac{R^2}{R+h}\right)^2}{(tg^2\alpha).(2Rh+h^2) + R^2 - \left(\frac{R^2}{R+h}\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \quad (18)$$