

Material Suplementar para “Obtenção da relação de planck em espaço-tempo com horizonte de eventos”

0.1. Apêndice C

Neste apêndice, apresentamos a dedução explícita do espectro térmico associado à mudança exponencial para o vermelho (redshift) discutida na Seção 4. O objetivo é demonstrar, de maneira detalhada e sistemática, como a análise da transformada de Fourier da função de onda $\phi(\tau)$, vista por um observador acelerado, conduz naturalmente à obtenção de um espectro de energia de natureza térmica, revelando a origem matemática da chamada temperatura de Unruh.

Do ponto de vista físico, este resultado mostra que um observador com aceleração constante percebe o vácuo de Minkowski como um banho térmico de partículas, cuja temperatura é proporcional à aceleração. Assim, a análise que segue não apenas reforça a conexão entre o movimento acelerado e a termalização do vácuo quântico, como também ilustra de forma pedagógica a ponte entre a formulação matemática da teoria quântica de campos e os fenômenos físicos de radiação quântica em espaços-tempos com horizonte.

A abordagem aqui apresentada é de especial relevância para estudantes de graduação e pós-graduação, pois exemplifica o modo como manipulações analíticas, em particular, o uso de transformadas complexas e propriedades da função gama permitem extrair consequências físicas profundas a partir de expressões aparentemente simples. Substituímos a Eq.(41) na definição da transformada de Fourier da Eq.(45), obtendo:

$$\begin{aligned} f(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \exp\left[\frac{i\Omega}{\kappa} \exp(-\kappa\tau)\right] \exp(i\nu\tau) \\ \ln(\xi) &= -\kappa\tau, \quad d\tau = -\frac{1}{\kappa} \frac{d\xi}{\xi} \\ \tau &\rightarrow -\infty \Rightarrow \xi_0 = \infty, \quad \tau \rightarrow \infty \Rightarrow \xi_1 = 0. \end{aligned}$$

Portanto, encontramos:

$$\begin{aligned} f(\nu) &= \int_{\infty}^0 \left(-\frac{1}{\kappa}\right) \frac{d\xi}{\xi} \exp\left\{\frac{i\Omega}{\kappa} \exp[\ln(\xi)]\right\} \exp\left\{i\nu \left[-\frac{1}{\kappa} \ln(\xi)\right]\right\} \\ f(\nu) &= \frac{1}{\kappa} \int_0^{\infty} \xi^{-1} d\xi \exp\left[\frac{i\Omega\xi}{\kappa}\right] \exp\left[\ln(\xi)^{-i\nu/\kappa}\right] \\ f(\nu) &= \frac{1}{\kappa} \int_0^{\infty} \xi^{-1} \xi^{-i\nu/\kappa} d\xi \exp\left[\frac{i\Omega\xi}{\kappa}\right] \\ f(\nu) &= \frac{1}{\kappa} \int_0^{\infty} d\xi \xi^{(-1-i\nu/\kappa)} \exp\left[\frac{i\Omega\xi}{\kappa}\right] \\ f(\nu) &= \frac{1}{\kappa} \int_0^{\infty} d\xi \xi^{(s-1)} e^{a\xi}, \end{aligned} \tag{1}$$

onde $s \equiv -\frac{i\nu}{\kappa}$ e $a \equiv \frac{i\Omega}{\kappa}$. Reescrevendo a Eq.(1)

$$f(\nu) = \frac{1}{\kappa} \int_0^{\infty} d\xi \xi^{(s-1)} e^{(-a\xi)}. \tag{2}$$

Agora, faremos a seguinte transformação de coordenadas:

$$y = -a\xi, \quad d\xi = -\frac{dy}{a},$$

logo após a substituimos na Eq.(2)

$$\begin{aligned}
f(\nu) &= \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty \left(-\frac{dy}{a}\right) \left(-\frac{y}{a}\right)^s \left(-\frac{y}{a}\right)^{-1} e^{-y} \\
f(\nu) &= \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty \left(-\frac{dy}{a}\right) \left(-\frac{y}{a}\right)^s \left(-\frac{a}{y}\right) e^{-y} \\
f(\nu) &= \frac{1}{\kappa} \frac{1}{(-a)^s} \int_0^\infty dy y^s y^{-1} e^{-y} \\
f(\nu) &= \frac{1}{\kappa} \frac{1}{(-a)^s} \int_0^\infty dy y^{s-1} e^{-y}
\end{aligned} \tag{3}$$

Nós usaremos a definição da função $\Gamma(s)$,

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty dy y^{s-1} e^{-y}, \tag{4}$$

substituindo na Eq.(3)

$$\begin{aligned}
f(\nu) &= \frac{1}{\kappa} (-a)^{-s} \Gamma(s) \\
f(\nu) &= \frac{1}{\kappa} \left(-\frac{i\Omega}{\kappa}\right)^{i\nu/\kappa} \Gamma\left(-\frac{i\nu}{\kappa}\right) \\
f(\nu) &= \frac{1}{\kappa} \exp\left[\left(\frac{i\nu}{\kappa}\right) \ln\left(-\frac{i\Omega}{\kappa}\right)\right] \Gamma\left(-\frac{i\nu}{\kappa}\right).
\end{aligned} \tag{5}$$

Para assegurar a convergência considere o limite:

$$\begin{aligned}
\ln\left[-\frac{i\Omega}{\kappa}\right] &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln\left[\left(-\frac{i\Omega}{\kappa}\right) + \epsilon\right] \\
\ln\left[-\frac{i\Omega}{\kappa}\right] &= \ln(-i) + \ln\left[\left(\frac{\Omega}{\kappa}\right)\right] \\
\ln\left[-\frac{i\Omega}{\kappa}\right] &= \ln\left[\exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right)\right] + \ln\left[\left(\frac{\Omega}{\kappa}\right)\right] \\
\ln\left[-\frac{i\Omega}{\kappa}\right] &= -i\frac{\pi}{2} + \ln\left[\left(\frac{\Omega}{\kappa}\right)\right],
\end{aligned} \tag{6}$$

onde temos usado $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$. Substituindo a Eq.(6) na Eq.(5)

$$\begin{aligned}
f(\nu) &= \frac{1}{\kappa} \exp\left\{\frac{i\nu}{\kappa} \left[-\frac{i\pi}{2} + \ln\left(\frac{\Omega}{\kappa}\right)\right]\right\} \Gamma\left(-\frac{i\nu}{\kappa}\right) \\
f(\nu) &= \frac{1}{\kappa} \exp\left\{\left[\frac{\pi\nu}{2\kappa} - \frac{i\nu}{\kappa} \ln\left(\frac{\Omega}{\kappa}\right)\right]\right\} \Gamma\left(-\frac{i\nu}{\kappa}\right) \\
f(\nu) &= \frac{1}{\kappa} \exp\left\{\left[\frac{\pi\nu}{2\kappa} + \ln\left(\frac{\Omega}{\kappa}\right)^{-\frac{i\nu}{\kappa}}\right]\right\} \Gamma\left(-\frac{i\nu}{\kappa}\right) \\
f(\nu) &= \frac{1}{\kappa} \exp\left(\frac{\pi\nu}{2\kappa}\right) \exp\left[\ln\left(\frac{\Omega}{\kappa}\right)^{\frac{i\nu}{\kappa}}\right] \Gamma\left(-\frac{i\nu}{\kappa}\right) \\
f(\nu) &= \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\Omega}{\kappa}\right)^{\frac{i\nu}{\kappa}} \Gamma\left(-\frac{i\nu}{\kappa}\right) e^{\left(\frac{\pi\nu}{2\kappa}\right)}
\end{aligned} \tag{7}$$

Agora, iremos calcular as bandas de frequência negativa

$$f(-\nu) = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\Omega}{\kappa}\right)^{\left(-\frac{i\nu}{\kappa}\right)} \Gamma\left(\frac{i\nu}{\kappa}\right) e^{\left(-\frac{\pi\nu}{2\kappa}\right)}, \tag{8}$$

em seguida, calculamos o módulo quadrado de $f(-\nu)$

$$\begin{aligned}
|f(-\nu)|^2 &= f(-\nu)^* f(-\nu) \\
|f(-\nu)|^2 &= \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\Omega}{\kappa}\right)^{\left(\frac{i\nu}{\kappa}\right)} \Gamma\left(-\frac{i\nu}{\kappa}\right) e^{\left(-\frac{\pi\nu}{2\kappa}\right)} \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\Omega}{\kappa}\right)^{\left(-\frac{i\nu}{\kappa}\right)} \Gamma\left(\frac{i\nu}{\kappa}\right) e^{\left(-\frac{\pi\nu}{2\kappa}\right)} \\
|f(-\nu)|^2 &= \left(\frac{1}{\kappa^2}\right) \Gamma\left(\frac{i\nu}{\kappa}\right) \Gamma\left(-\frac{i\nu}{\kappa}\right) e^{\left(-\frac{\pi\nu}{\kappa}\right)}
\end{aligned} \tag{9}$$

Adiante, iremos calcular o produto de duas funções Γ 's complexas:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{i\nu}{\kappa}\right) \Gamma\left(-\frac{i\nu}{\kappa}\right) &= -\frac{\pi}{\left(\frac{i\nu}{\kappa}\right) \sin\left(\frac{i\pi\nu}{\kappa}\right)} \\
\Gamma\left(\frac{i\nu}{\kappa}\right) \Gamma\left(-\frac{i\nu}{\kappa}\right) &= -\frac{\pi\kappa}{i\nu \left[\frac{e^{i(i\pi\nu/\kappa)} - e^{i(-i\pi\nu/\kappa)}}{2i}\right]} \\
\Gamma\left(\frac{i\nu}{\kappa}\right) \Gamma\left(-\frac{i\nu}{\kappa}\right) &= -\frac{2\pi\kappa}{\nu \left[e^{i(i\pi\nu/\kappa)} - e^{i(-i\pi\nu/\kappa)}\right]} \\
\Gamma\left(\frac{i\nu}{\kappa}\right) \Gamma\left(-\frac{i\nu}{\kappa}\right) &= -\frac{2\pi\kappa}{\nu \left[e^{(-\pi\nu/\kappa)} - e^{(\pi\nu/\kappa)}\right]} \\
\Gamma\left(\frac{i\nu}{\kappa}\right) \Gamma\left(-\frac{i\nu}{\kappa}\right) &= -\frac{2\pi\kappa}{-\nu e^{(-\pi\nu/\kappa)} \left[e^{(2\pi\nu/\kappa)} - 1\right]} \\
\Gamma\left(\frac{i\nu}{\kappa}\right) \Gamma\left(-\frac{i\nu}{\kappa}\right) &= \frac{2\pi\kappa e^{\left(\frac{\pi\nu}{\kappa}\right)}}{\nu \left[e^{\left(\frac{2\pi\nu}{\kappa}\right)} - 1\right]}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Substituindo a Eq.(10) na Eq.(9), obtemos

$$\begin{aligned}
|f(-\nu)|^2 &= \left(\frac{1}{\kappa^2}\right) \times \frac{2\pi\kappa e^{\left(\frac{\pi\nu}{\kappa}\right)}}{\nu \left[e^{\left(\frac{2\pi\nu}{\kappa}\right)} - 1\right]} e^{\left(-\frac{\pi\nu}{\kappa}\right)} \\
|f(-\nu)|^2 &= \left(\frac{2\pi}{\kappa}\right) \times \frac{1}{\nu \left[e^{\left(\frac{2\pi\nu}{\kappa}\right)} - 1\right]}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Após a sequência de manipulações integrais, substituições e uso da identidade envolvendo o produto de funções gama complexas [2, 3, 4],

$$\Gamma(z) \Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z \sin(\pi z)}, \tag{12}$$

chegamos finalmente ao resultado

$$\nu |f(-\nu)|^2 = \frac{\beta}{e^{\beta\nu} - 1},$$

com

$$\beta = \frac{2\pi}{\kappa}.$$

Este resultado mostra que o espectro de energia detectado pelo observador acelerado é planckiano, caracterizando uma distribuição térmica com temperatura [1]

$$T_U = \frac{\kappa}{2\pi}, \tag{13}$$

conhecida como temperatura de Unruh. Assim, o formalismo matemático confirma que a aceleração uniforme desempenha papel análogo ao de um campo gravitacional efetivo, revelando a equivalência profunda entre movimento acelerado e percepção de temperatura quântica.

Do ponto de vista pedagógico, este apêndice oferece uma oportunidade de conectar três pilares fundamentais da física teórica moderna: a teoria quântica de campos, a relatividade e a termodinâmica. A análise rigorosa das integrais complexas e a utilização das propriedades da função gama ilustram como conceitos matemáticos abstratos adquirem significado físico tangível, sendo, portanto, uma ferramenta essencial para estudantes que buscam compreender a gênese da radiação de Unruh e, por extensão, o mecanismo subjacente à radiação de Hawking.

Referências

- [1] W.G. Unruh, Phys. Rev. D **13**, 191 (1976).
- [2] I.S. Gradshteyn e I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Gosudarstvennoe Izdatel'stvo Tekhniko-Teoreticheskoi Literatury, Moscou, 1943).
- [3] T.L. Chow, *Mathematical Methods for Physicists: A Concise Introduction* (Cambridge University Press, Cambridge 2000).
- [4] E. Butkov, *Física Matemática* (LTC, Rio de Janeiro, 1968).