

Material Suplementar para “Obtenção da relação de planck em espaço-tempo com horizonte de eventos”

0.1. Apêndice B

Neste apêndice, apresentamos a derivação detalhada das expressões obtidas na Seção (3), evidenciando como o formalismo de integrais de caminho, quando estendido ao tempo imaginário (ou euclidiano), conduz naturalmente à forma explícita da matriz densidade térmica de um sistema quântico em equilíbrio. O objetivo é mostrar, de maneira rigorosa e pedagógica, como o procedimento de rotação de Wick conecta a formulação quântica e estatística, permitindo interpretar a evolução temporal em termos de temperatura inversa $\beta = 1/k_B T$.

Continuando analiticamente a expressão do propagador quântico para o tempo imaginário, identificamos que a matriz de densidade térmica pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} K(t_2, q_2; t_1, q_1) &= N \int Dq \times \exp[i\mathcal{S}(q)] \\ K(t_2, q_2; t_1, q_1) &= N \int Dq \times \exp\left[i \int_{t_1}^{t_2} L dt\right], \end{aligned} \quad (1)$$

onde $L = T - V$ é a lagrangiana do sistema. A transformação $dt = idT_E$ introduz o tempo euclidiano, correspondendo à rotação de Wick $t \rightarrow iT_E$, que converte a fase oscilatória do integrando em uma exponencial decrescente. Substituindo na Eq.(1), obtém-se:

$$\begin{aligned} K(\beta, q; 0, q') &= N \int Dq \times \exp\left[i \int_0^\beta L(idT_E)\right] \\ K(\beta, q; 0, q') &= N \int Dq \times \exp\left[- \int_0^\beta L dT_E\right], \end{aligned} \quad (2)$$

revelando o chamado kernel euclidiano,

$$K(\beta, q; 0, q') = N \int Dq \times \exp[-\mathcal{S}_E], \quad (3)$$

no qual $\mathcal{S}_E$ é a ação euclidiana.

Aplicando essa formulação ao oscilador harmônico, cuja lagrangiana é $L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{m\omega^2}{2}q^2$, obtemos, após a rotação temporal $t \rightarrow iT_E$, a lagrangiana euclidiana:

$$L_E = -\frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{m\omega^2}{2}q^2. \quad (4)$$

A ação euclidiana, expressa em unidades naturais ($\hbar = k_B = 1$), é então dada por:

$$\mathcal{S}_E = -\frac{m}{2} \int_0^\beta (\dot{q}^2 + m\omega^2 q^2) dT_E. \quad (5)$$

A partir do princípio variacional $\delta\mathcal{S}_E = 0$, obtemos a equação de movimento:

$$\ddot{q} - \omega^2 q = 0, \quad (6)$$

cujas soluções gerais são combinações lineares das funções hiperbólicas:

$$q(T_E) = A \sinh(\omega T_E) + B \cosh(\omega T_E). \quad (7)$$

Elevando a Eq.(7) ao quadrado:

$$\begin{aligned} q^2 &= A^2 \sinh^2(\omega T_E) + B^2 \cosh^2(\omega T_E) + 2AB \sinh(\omega T_E) \cosh(\omega T_E) \\ q^2 &= A^2 \sinh^2(\omega T_E) + B^2 \cosh^2(\omega T_E) + AB \sinh(2\omega T_E). \end{aligned} \quad (8)$$

Derivando a Eq.(7) em relação ao tempo euclidiano e a elevando ao quadrado, obtemos

$$\dot{q}^2 = \omega^2 \left[B^2 \sinh(\omega T_E)^2 + A^2 \cosh(\omega T_E)^2 + AB \sinh(2\omega T_E) \right]. \quad (9)$$

Agora, substituindo às Eqs. (8) e (9) na Eq.(5), calcularemos a ação do oscilador harmônico

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_E &= -\frac{m\omega^2}{2} \int_0^\beta \left[A^2 \sinh(\omega T_E)^2 + B^2 \cosh(\omega T_E)^2 + AB \sinh(2\omega T_E) \right. \\ &\quad \left. + B^2 \sinh(\omega T_E)^2 + A^2 \cosh(\omega T_E)^2 + AB \sinh(2\omega T_E) \right] dT_E \\ \mathcal{S}_E &= -\frac{m\omega^2}{2} \int_0^\beta \left[A^2 \left(\sinh(\omega T_E)^2 + \cosh(\omega T_E)^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + B^2 \left(\sinh(\omega T_E)^2 + \cosh(\omega T_E)^2 \right) + 2AB \sinh(2\omega T_E) \right] dT_E \\ \mathcal{S}_E &= -\frac{m\omega^2}{2} \int_0^\beta \left[(A^2 + B^2) \cosh(2\omega T_E) + 2AB \sinh(2\omega T_E) \right] dT_E \\ \mathcal{S}_E &= -\frac{m\omega}{2} \left[\frac{(A^2 + B^2)}{2} \sinh(2\omega T_E) + AB \cosh(2\omega T_E) \right]_0^\beta \\ \mathcal{S}_E &= -\frac{m\omega}{2} \left[\frac{(A^2 + B^2)}{2} \sinh(2\omega\beta) + AB (\cosh(2\omega\beta) - 1) \right] \\ \mathcal{S}_E &= -\frac{m\omega}{2} \left[\frac{(A^2 + B^2)}{2} \sinh(2\omega\beta) + AB \cosh(2\omega\beta) - AB \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Aplicando as condições de extremização:

$$\begin{aligned} q(0) &= q' = A \sinh(0) + B \cosh(0) \\ B &= q', \end{aligned}$$

da mesma maneira

$$\begin{aligned} q(\beta) &= q = A \sinh(\beta) + q' \cosh(\beta) \\ A &= \frac{q - q' \cosh(\omega\beta)}{\sinh(\omega\beta)}. \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{q^2 + q'^2 \cosh(\omega\beta) - 2qq' \cosh(\omega\beta)}{\sinh(\omega\beta)^2}, \\ B^2 &= q'^2, \\ A^2 + B^2 &= \frac{q^2 + q'^2 \cosh(\omega\beta) - 2qq' \cosh(\omega\beta)}{\sinh(\omega\beta)^2} + q'^2, \\ A^2 + B^2 &= \frac{q^2 + q'^2 \cosh(\omega\beta) - 2qq' \cosh(\omega\beta) + q'^2 \sinh(\omega\beta)^2}{\sinh(\omega\beta)^2}, \\ A^2 + B^2 &= \frac{q^2 + q'^2 \cosh(2\omega\beta) - 2qq' \cosh(\omega\beta)}{\sinh(\omega\beta)^2}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$AB = \frac{qq' - q'^2 \cosh(\omega\beta)}{\sinh(\omega\beta)^2}. \quad (12)$$

Substituindo as Eqs. (11) e (12) na Eq.(10), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_E &= -\frac{m\omega}{2} \left\{ \left[\frac{q^2 + q'^2 \cosh(2\omega\beta) - 2qq' \cosh(\omega\beta)}{2 \sinh(\omega\beta)^2} \right] \sinh(2\omega\beta) \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{qq' - q'^2 \cosh(\omega\beta)}{\sinh(\omega\beta)} \right] \cosh(2\omega\beta) - \left[\frac{qq' - q'^2 \cosh(\omega\beta)}{\sinh(\omega\beta)} \right] \right\} \\
\mathcal{S}_E &= -\frac{m\omega}{2} \left\{ \left[\frac{q^2 + q'^2 \cosh(2\omega\beta) - 2qq' \cosh(\omega\beta)}{2 \sinh^2(\omega\beta)} \right] 2 \sinh(\omega\beta) \cosh(\omega\beta) \right. \\
&\quad \left. + \frac{qq' \cosh(2\omega\beta) - q'^2 \cosh(\omega\beta) \cosh(2\omega\beta)}{\sinh(\omega\beta)} + \frac{-qq' + q'^2 \cosh(\omega\beta)}{\sinh(\omega\beta)} \right\} \\
\mathcal{S}_E &= -\frac{m\omega}{2} \left\{ \frac{q^2 + q'^2 \cosh(2\omega\beta) \cosh(\omega\beta) - 2qq' \cosh^2(\omega\beta)}{\sinh(\omega\beta)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{qq' \cosh(2\omega\beta) - q'^2 \cosh(\omega\beta) \cosh(2\omega\beta) - qq' + q'^2 \cosh(\omega\beta)}{\sinh(\omega\beta)} \right\} \\
\mathcal{S}_E &= -\frac{m\omega}{2} \left\{ \frac{q^2 \cosh(\omega) + q'^2 \cosh(\omega\beta) - 2qq' \cosh^2(\omega\beta) + qq' \cosh(2\omega\beta) - qq'}{\sinh(\omega\beta)} \right\} \\
\mathcal{S}_E &= -\frac{m\omega}{2} \left\{ \frac{(q^2 + q'^2) \cosh(\omega\beta) - 2qq' \cosh^2(\omega\beta) + qq' [\cosh(2\omega\beta) - 1]}{\sinh(\omega\beta)} \right\} \\
\mathcal{S}_E &= -\frac{m\omega}{2} \left\{ \frac{(q^2 + q'^2) \cosh(\omega\beta) - 2qq' \cosh^2(\omega\beta) + 2qq' \sinh^2(\omega\beta)}{\sinh(\omega\beta)} \right\} \\
\mathcal{S}_E &= -\frac{m\omega}{2} \left\{ \frac{(q^2 + q'^2) \cosh(\omega\beta) - 2qq' [\cosh^2(\omega\beta) - \sinh^2(\omega\beta)]}{\sinh(\omega\beta)} \right\} \\
\mathcal{S}_E &= -\frac{m\omega}{2} \left\{ \frac{(q^2 + q'^2) \cosh(\omega\beta) - 2qq'}{\sinh(\omega\beta)} \right\} \\
\mathcal{S}_E &= -\frac{m\omega}{2 \sinh(\omega\beta)} \{ (q^2 + q'^2) \cosh(\omega\beta) - 2qq' \}. \tag{13}
\end{aligned}$$

Descobrimos que a matriz de densidade térmica do sistema pode ser expressa na forma

$$\rho(q, q') = N \exp \left\{ -\frac{m\omega}{2 \sinh(\omega\beta)} [(q^2 + q'^2) \cosh(\omega\beta) - 2qq'] \right\}. \tag{14}$$

A Eq.(13) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_E &= -\frac{m\omega}{4 \sinh(\omega\beta/2) \cosh(\omega\beta/2)} \{q^2 \cosh(\omega\beta) + q'^2 \cosh(\omega\beta) - 2qq'\} \\
\mathcal{S}_E &= -\frac{m\omega}{4 \sinh(\omega\beta/2) \cosh(\omega\beta/2)} \{q^2 \cosh(\omega\beta) + q'^2 \cosh(\omega\beta) \\
&\quad - 2qq' \cosh(\omega\beta) + 2qq' \cosh(\omega\beta) - 2qq'\} \\
\mathcal{S}_E &= -\frac{m\omega}{4 \sinh(\omega\beta/2) \cosh(\omega\beta/2)} \{(q^2 + q'^2 - 2qq') \cosh(\omega\beta) \\
&\quad + 2qq' (\cosh(\omega\beta) - 1)\} \\
\mathcal{S}_E &= -\frac{m\omega}{4 \sinh(\omega\beta/2) \cosh(\omega\beta/2)} \{(q - q')^2 \cosh(\omega\beta) + 4qq' \sinh^2(\omega\beta/2)\} \\
\mathcal{S}_E &= -\frac{m\omega}{4 \sinh(\omega\beta/2) \cosh(\omega\beta/2)} \{(q - q')^2 [\cosh^2(\omega\beta/2) + \sinh^2(\omega\beta/2)] \\
&\quad + 4qq' \sinh^2(\omega\beta/2)\} \\
\mathcal{S}_E &= -\frac{m\omega}{4 \sinh(\omega\beta/2) \cosh(\omega\beta/2)} \{(q - q')^2 \cosh^2(\omega\beta/2) \\
&\quad + [(q - q')^2 + 4qq'] \sinh^2(\omega\beta/2)\} \\
\mathcal{S}_E &= -\frac{m\omega}{4 \sinh(\omega\beta/2) \cosh(\omega\beta/2)} \{(q - q')^2 \cosh^2(\omega\beta/2) \\
&\quad + (q + q')^2 \sinh^2(\omega\beta/2)\} \\
\mathcal{S}_E &= -\frac{m\omega}{4} \left\{ (q - q')^2 \frac{\cosh^2(\omega\beta/2)}{\sinh(\omega\beta/2) \cosh(\omega\beta/2)} \right. \\
&\quad \left. + (q + q')^2 \frac{\sinh^2(\omega\beta/2)}{\sinh(\omega\beta/2) \cosh(\omega\beta/2)} \right\} \\
\mathcal{S}_E &= -\frac{m\omega}{4} \left\{ (q - q')^2 \frac{\cosh(\omega\beta/2)}{\sinh(\omega\beta/2)} + (q + q')^2 \frac{\sinh(\omega\beta/2)}{\cosh(\omega\beta/2)} \right\} \\
\mathcal{S}_E &= -\frac{m\omega}{4} \left\{ (q - q')^2 \coth(\omega\beta/2) + (q + q')^2 \tanh(\omega\beta/2) \right\}. \tag{15}
\end{aligned}$$

Esse procedimento, exposto de maneira algébrica, conduz à expressão final da ação euclidiana clássica:

$$\mathcal{S}_E = -\frac{m\omega}{2 \sinh(\omega\beta)} \{(q^2 + q'^2) \cosh(\omega\beta) - 2qq'\}. \tag{16}$$

A substituição de $\mathcal{S}_E$ no kernel euclidiano nos fornece diretamente a matriz de densidade térmica $\rho(q, q')$, que expressa o caráter estatístico e quântico do sistema:

$$\rho(q, q') = N \exp \left\{ -\frac{m\omega}{2 \sinh(\omega\beta)} [(q^2 + q'^2) \cosh(\omega\beta) - 2qq'] \right\}. \tag{17}$$

Após manipulações algébricas adicionais, essa expressão assume a forma mais simétrica e compacta:

$$\rho(q, q') = N \exp \left\{ -\frac{m\omega}{4} \left[(q - q')^2 \coth\left(\frac{\omega\beta}{2}\right) + (q + q')^2 \tanh\left(\frac{\omega\beta}{2}\right) \right] \right\}, \tag{18}$$

que é precisamente a matriz densidade térmica do oscilador harmônico quântico em equilíbrio a uma temperatura $T = 1/\beta$.

Do ponto de vista conceitual, este resultado mostra como o formalismo de tempo euclidiano permite a tradução natural entre a dinâmica quântica e a termodinâmica estatística, sendo uma das ferramentas fundamentais na formulação de teorias quânticas de campos em espaços-tempos curvos e na análise de fenômenos como a radiação de Hawking e o efeito Unruh.

Além disso, o detalhamento matemático apresentado aqui tem também um caráter pedagógico: fornece aos estudantes uma visão completa da aplicação das integrais de caminho à mecânica quântica de sistemas simples, oferecendo uma base sólida para compreender os métodos mais sofisticados empregados em gravitação quântica e teoria de campos a temperatura finita.