

Material Suplementar para “Obtenção da relação de planck em espaço-tempo com horizonte de eventos”

0.1. Apêndice A

Nesta secção revisitamos detalhadamente os referenciais de Rindler, que são inicialmente explorados em [1, 2]. Sabemos que Relatividade Restrita não se limita à análise de movimentos com velocidade constante, sendo plenamente capaz de tratar movimentos acelerados, desde que formulados a partir de referenciais inerciais instantâneos. Nesse contexto, a velocidade de uma partícula medida em um referencial inercial S' é dada por $u'(t') = dx'/dt'$.

Considere, portanto, uma partícula que se move ao longo do eixo x com velocidade variável $u(t) = dx/dt$ em um referencial inercial S . Seja S' um outro referencial inercial que se desloca com velocidade constante v em relação a S , na mesma direção do movimento da partícula. Em cada instante, as velocidades medidas em S e S' estão relacionadas pela fórmula relativística de adição de velocidades,

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}. \quad (1)$$

Essa relação mostra explicitamente como a velocidade observada depende não apenas das velocidades individuais, mas também dos efeitos relativísticos associados à invariância da velocidade da luz. A partir dessa expressão, pode-se analisar como pequenas variações de velocidade em um referencial se traduzem em variações correspondentes no outro.

Para relacionar as acelerações medidas em S e S' , é necessário levar em conta a transformação relativística dos intervalos de tempo. Utilizando as transformações de Lorentz, obtemos

$$\begin{aligned} dt &= \frac{dt' + \frac{v}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ dt &= \frac{dt' \left(1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ dt &= \frac{\left(1 + \frac{u'v}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} dt'. \end{aligned} \quad (2)$$

Combinando a expressão para a transformação das velocidades com a transformação temporal acima, obtém-se a relação entre as variações infinitesimais das velocidades nos dois referenciais,

$$du = \frac{du' \left[1 + \frac{u'v}{c^2}\right] - (u' + v) \frac{du'v}{c^2}}{(1 + u'v/c^2)^2}. \quad (3)$$

A aceleração em S é definida como $a = du/dt$, enquanto a aceleração medida em S' é $a' = du'/dt'$. Utilizando as relações anteriores, temos que

$$\begin{aligned}
a &= \frac{du}{dt} \\
a &= \frac{\frac{du'}{dt'} \left[1 + u'v/c^2 \right] - (u' + v) (du'v/c^2)}{\frac{(1 + u'v/c^2)^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} dt'} \\
a &= \frac{du' \left[1 + u'v/c^2 \right] - (u' + v) (du'v/c^2)}{\gamma (1 + u'v/c^2)^3 dt'} \\
a &= \left[\frac{(c^2 + u'v) - (u' + v)v}{c^2 \gamma (1 + u'v/c^2)^3} \right] \frac{du'}{dt'} \\
a &= \left[\frac{c^2 + u'v - u'v - v^2}{c^2 \gamma (1 + u'v/c^2)^3} \right] a' \\
a &= \left[\frac{c^2 - v^2}{c^2 \gamma (1 + u'v/c^2)^3} \right] a' \\
a &= \left[\frac{c^2 (1 - v^2/c^2)}{c^2 \gamma (1 + u'v/c^2)^3} \right] a' \\
a &= \frac{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}{(1 + u'v/c^2)^3} a'. \tag{4}
\end{aligned}$$

Até este ponto, o referencial S' foi considerado com velocidade arbitrária. Um caso de particular interesse ocorre quando se escolhe $v = u(t)$, de modo que S' coincida, em um dado instante, com o referencial de repouso instantâneo da partícula. Nesse instante específico, tem-se $u' = 0$, e a expressão anterior simplifica-se significativamente, resultando em

$$a = \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{3/2} a'. \tag{5}$$

A grandeza a' representa a aceleração medida no referencial de repouso instantâneo da partícula e é denominada aceleração própria ou aceleração de repouso. Essa quantidade possui um papel central na descrição do movimento acelerado relativístico, pois corresponde à aceleração efetivamente sentida pelo observador que acompanha a partícula.

No caso particular em que a aceleração própria é constante, a trajetória da partícula no espaço-tempo de Minkowski corresponde a uma hipérbole, caracterizando o movimento uniformemente acelerado relativístico. Observadores que compartilham essa aceleração própria constante definem um sistema de coordenadas não inercial conhecido como referencial de Rindler. Esses referenciais são especialmente importantes porque permitem descrever observadores acelerados em um espaço-tempo plano, introduzindo naturalmente o conceito de horizonte de Rindler, associado à limitação causal imposta pela aceleração.

Assim, a Eq.(5) constitui o ponto de partida para a construção das coordenadas de Rindler e para a análise de fenômenos físicos associados a observadores acelerados, sendo sua integração possível uma vez especificada a dependência temporal da aceleração própria.

Vamos agora concentrar a análise no caso em que a partícula realiza um movimento retilíneo uniformemente acelerado no espaço. Nesse regime, assume-se que a aceleração medida no referencial de repouso instantâneo da partícula, isto é, a aceleração própria, é constante. Denotaremos essa aceleração por $a' = g$, em analogia com a aceleração gravitacional uniforme.

Partindo da Eq.(5), que relaciona a aceleração coordenada com a aceleração própria, e impondo a condição inicial $u(0) = 0$, obtém-se a seguinte equação diferencial para a velocidade da partícula:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2} g \\ \frac{du}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}} &= g dt \\ \int \frac{du}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}} &= g \int t.\end{aligned}\tag{6}$$

A integral do lado esquerdo pode ser avaliada de forma conveniente por meio de uma substituição trigonométrica. Para isso, introduz-se a mudança de variável

$$\begin{aligned}u &= c \sin \theta \\ du &= c \cos \theta d\theta.\end{aligned}\tag{7}$$

Substituindo a Eq.(7) na Eq.(6), obtém-se

$$\begin{aligned}\int \frac{c \cos \theta d\theta}{\left(1 - \frac{c^2 \sin^2 \theta}{c^2}\right)^{3/2}} &= gt \\ \int \frac{\cos \theta d\theta}{(1 - \sin^2 \theta)^{3/2}} &= \frac{gt}{c} \\ \int \frac{\cos \theta d\theta}{(\cos^2 \theta)^{3/2}} &= \frac{gt}{c} \\ \int \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} &= \frac{gt}{c} \\ \tan \theta &= \frac{gt}{c}.\end{aligned}\tag{8}$$

A relação entre a variável auxiliar θ e a velocidade da partícula pode ser obtida diretamente da substituição trigonométrica introduzida anteriormente. A partir da Eq.(7), tem-se

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{u}{c} \\ \cos \theta &= \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \\ \tan \theta &= \frac{\frac{u}{c}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.\end{aligned}\tag{9}$$

Substituindo a Eq.(9) na Eq.(8), chega-se à relação explícita entre a velocidade da partícula e o tempo,

$$\begin{aligned}\frac{\frac{u}{c}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} &= \frac{gt}{c} \\ \frac{u^2}{c^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)} &= \frac{g^2 t^2}{c^2} \\ u^2 &= g^2 t^2 - \frac{g^2}{c^2} u^2 t^2 \\ u^2 + \frac{g^2}{c^2} u^2 t^2 &= g^2 t^2 \\ u &= \frac{gt}{\sqrt{1 + \frac{g^2}{c^2} t^2}}.\end{aligned}\tag{10}$$

A Eq.(10) fornece a velocidade relativística de uma partícula submetida a aceleração própria constante. Observa-se que, diferentemente do caso clássico, a velocidade cresce de forma assintótica, aproximando-se de c quando $t \rightarrow \infty$, mas jamais ultrapassando esse valor.

A partir dessa expressão para a velocidade, pode-se determinar a trajetória da partícula integrando a relação $u = dx/dt$,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{gt}{\sqrt{1 + \frac{g^2}{c^2}t^2}} \\ dx &= \frac{gt}{\sqrt{1 + \frac{g^2}{c^2}t^2}} dt \\ x &= \frac{c^2}{g} \sqrt{1 + \frac{g^2}{c^2}t^2} + x_0 - \frac{c^2}{g},\end{aligned}\tag{11}$$

onde x_0 é a constante de integração associada à posição inicial da partícula no instante $t = 0$.

A Eq.(11) pode ser reorganizada de modo a evidenciar a natureza geométrica da trajetória no espaço-tempo. Escrevendo-a na forma

$$\left(x - x_0 + \frac{c^2}{g}\right)^2 - c^2 t^2 = \frac{c^4}{g^2},\tag{12}$$

verifica-se que a linha de mundo da partícula corresponde a uma hipérbole no diagrama de Minkowski.

Esse resultado mostra que o movimento retilíneo com aceleração própria constante está associado a trajetórias hiperbólicas no espaço-tempo. Por essa razão, esse tipo de movimento é denominado movimento hiperbólico e constitui a base geométrica para a introdução dos referenciais de Rindler, nos quais observadores acelerados descrevem o espaço-tempo de Minkowski de forma natural, embora restrita a uma região causal específica.

Utilizando o tempo próprio τ da partícula como parâmetro, é possível obter uma representação paramétrica particularmente simples de sua linha de mundo. Essa escolha é natural, uma vez que o tempo próprio corresponde ao tempo medido por um observador que acompanha a partícula ao longo de sua trajetória.

Partindo da definição do intervalo de tempo próprio e utilizando a expressão para a velocidade relativística obtida anteriormente, tem-se

$$\begin{aligned}d\tau &= dt \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \\ d\tau &= dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{gt}{1 + \frac{g^2 t^2}{c^2}} \right)^2} \\ d\tau &= dt \sqrt{1 - \frac{g^2 t^2}{c^2 + g^2 t^2}} \\ d\tau &= dt \sqrt{\frac{c^2 + g^2 t^2 - g^2 t^2}{c^2 + g^2 t^2}} \\ d\tau &= dt \sqrt{\frac{c^2}{c^2 + g^2 t^2}} \\ d\tau &= dt \sqrt{\frac{c^2}{c^2 \left(1 + \frac{g^2 t^2}{c^2} \right)}} \\ d\tau &= \frac{dt}{\sqrt{1 + \frac{g^2 t^2}{c^2}}}.\end{aligned}\tag{13}$$

A integração direta da Eq.(13) fornece a relação entre o tempo próprio e o tempo,

$$\int d\tau = \int \frac{dt}{\sqrt{1 + \frac{g^2 t^2}{c^2}}}.\tag{14}$$

A integral do lado direito pode ser avaliada de forma conveniente por meio da substituição hiperbólica

$$\begin{aligned}t &= \frac{c}{g} \sinh(\varphi) \\ dt &= \frac{c}{g} \cosh(\varphi) d\varphi.\end{aligned}\tag{15}$$

Substituindo a Eq.(15) na Eq.(14), obtém-se

$$\begin{aligned}
\int d\tau &= \frac{c}{g} \int \frac{\cosh(\varphi) d\varphi}{\sqrt{1 + \frac{g^2}{c^2} \times \frac{c^2}{g^2} \sinh^2(\varphi)}} \\
\tau &= \frac{c}{g} \int \frac{\cosh(\varphi) d\varphi}{\sqrt{1 + \sinh^2(\varphi)}} \\
\tau &= \frac{c}{g} \int \frac{\cosh(\varphi) d\varphi}{\cosh(\varphi)} \\
\tau &= \frac{c}{g} \varphi \\
\varphi &= \frac{g}{c} \tau.
\end{aligned} \tag{16}$$

Substituindo a Eq.(16) na Eq.(15), obtém-se a relação explícita entre o tempo e o tempo próprio,

$$t = \frac{c}{g} \sinh\left(\frac{g\tau}{c}\right). \tag{17}$$

Inserindo essa expressão na Eq.(11) e ajustando adequadamente as constantes de integração, segue que

$$\begin{aligned}
x &= \frac{c^2}{g} \sqrt{1 + \frac{g^2}{c^2} \times \frac{c^2}{g^2} \sinh^2\left(\frac{g\tau}{c}\right)} \\
x &= \frac{c^2}{g} \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{g\tau}{c}\right)}.
\end{aligned}$$

Portanto, obtém-se

$$x = \frac{c^2}{g} \cosh\left(\frac{g\tau}{c}\right). \tag{18}$$

Adotando o sistema de unidades naturais ($c = 1$), chega-se finalmente à relação entre as coordenadas de Minkowski e as coordenadas associadas ao movimento uniformemente acelerado,

$$t = \frac{1}{g} \sinh(g\tau), \quad x = \frac{1}{g} \cosh(g\tau). \tag{19}$$

As expressões finais mostram que a trajetória de uma partícula com aceleração própria constante pode ser descrita de forma particularmente simples quando parametrizada pelo tempo próprio, assumindo uma forma hiperbólica no espaço-tempo de Minkowski. Essas relações evidenciam que observadores uniformemente acelerados percorrem hipérboles que permanecem confinadas a uma região específica do espaço-tempo, conhecida como cunha de Rindler. Essa restrição geométrica está diretamente associada à existência de um horizonte de Rindler, além do qual eventos não podem influenciar o observador acelerado. Dessa forma, o movimento hiperbólico fornece a base geométrica e física para a introdução dos referenciais de Rindler, permitindo compreender como sistemas de coordenadas não inerciais surgem naturalmente mesmo em um espaço-tempo plano, ao mesmo tempo em que estabelecem conexões profundas entre aceleração, causalidade e a estrutura do espaço-tempo.

Referências

- [1] W. Rindler, *Physical Review*, **119**, 2082 (1960).
- [2] Ø. Grøn, *Lecture Notes on the General Theory of Relativity: From Newton's Attractive Gravity to the Repulsive Gravity of Vacuum Energy* (Springer-Verlag, Berlin, 2009), v. 772.