

Material Suplementar para “Considerações históricas e físicas sobre a aberração da luz estelar”

Apêndice 1 - Tratamento via relatividade

De forma geral, o tratamento matemático do deslocamento angular devido à aberração da luz passa inicialmente pelo tema das transformações de velocidade do ponto de vista das transformações de Galileu, assim como da correção mais completa relacionada às transformações de Lorentz (caso relativístico). De fato, em 1727, Bradley apontou que a aberração da luz poderia ser explicada a partir da composição de velocidades via a perspectiva do movimento relativo entre corpos [1, 2, 3].

Transformações de velocidade

O movimento de uma dada partícula é descrito pela taxa de mudança da posição $\mathbf{r}(t)$ dessa partícula, que é uma função vetorial dependente do tempo. A velocidade da partícula é então obtida a partir da diferenciação

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \tag{1}$$

Observadores em diferentes sistemas de referência inercial, em movimento relativo um em relação ao outro, descreverão um dado evento de maneiras distintas. Um evento está associado a um determinado acontecimento localizado em um ponto do espaço e que ocorre em um dado intervalo de tempo. Assim, um dado evento tem coordenadas tanto espaciais quanto temporal. Nesse sentido, diz-se que um evento ocorre no espaço-tempo descrito por um conjunto de coordenadas no sistema de referência proposto. Suponha dois observadores ($\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}'$) vivendo respectivamente nos sistemas de referência S e S' , que estão em movimento relativo um em relação ao outro. Suponha aqui, por razões de simplicidade, que esse movimento relativo ocorre na direção x , com velocidade constante u (veja a Fig. 1). Dessa forma, um dado evento tem coordenadas de espaço-tempo (x, y, z, t) em S e (x', y', z', t') em S' . A partir de agora, a velocidade de uma partícula no sistema S será denotada por $\mathbf{v}(t)$ e no sistema S' por $\mathbf{v}'(t')$. Encontrando-se a regra de transformação $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}$, também encontra-se a regra de transformação para as velocidades. Isso pode ser feito sob duas perspectivas:

(a) por meio das Transformações de Galileu (cenário newtoniano, relatividade galileana), quando a velocidade relativa entre S e S' é muito menor que a velocidade da luz;

(b) por meio das Transformações de Lorentz (cenário einsteiniano, relatividade restrita), quando a velocidade relativa entre S e S' é uma fração considerável da velocidade da luz.

A partir das Transformações de Galileu

Restringindo o movimento relativo para que ele ocorra em um eixo comum a S e S' – por exemplo, o eixo x e x' , com velocidade u –, e sincronizando os dois sistemas tal que o início do movimento ocorre em $t = 0$ e $t' = 0$, quando os dois referenciais coincidem na origem de ambos. De tal forma que, em um certo momento t em S , a origem de S' , i.e. $x' = 0$, esteja localizada em $x = ut$. Por questões de simplicidade, as coordenadas que são transversais ao movimento relativo podem ser as mesmas em ambos os sistemas, i.e. $y' = y$ e $z' = z$. Assim, as relações de transformação ficam restritas às variáveis (x, t) e (x', t') .

Antes de Einstein, que é o caso aqui proposto – i.e. o cenário newtoniano descrito pelas transformações de Galileu –, presumia-se um tempo absoluto e, portanto, t e t' são iguais para um dado evento. Usando essa premissa e o fato de que $x = ut$ quando $x' = 0$, chega-se ao seguinte conjunto de transformações de coordenadas:

$$\text{Transf. de Galileu : } \begin{cases} x' = x - ut, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = t. \end{cases} \tag{2}$$

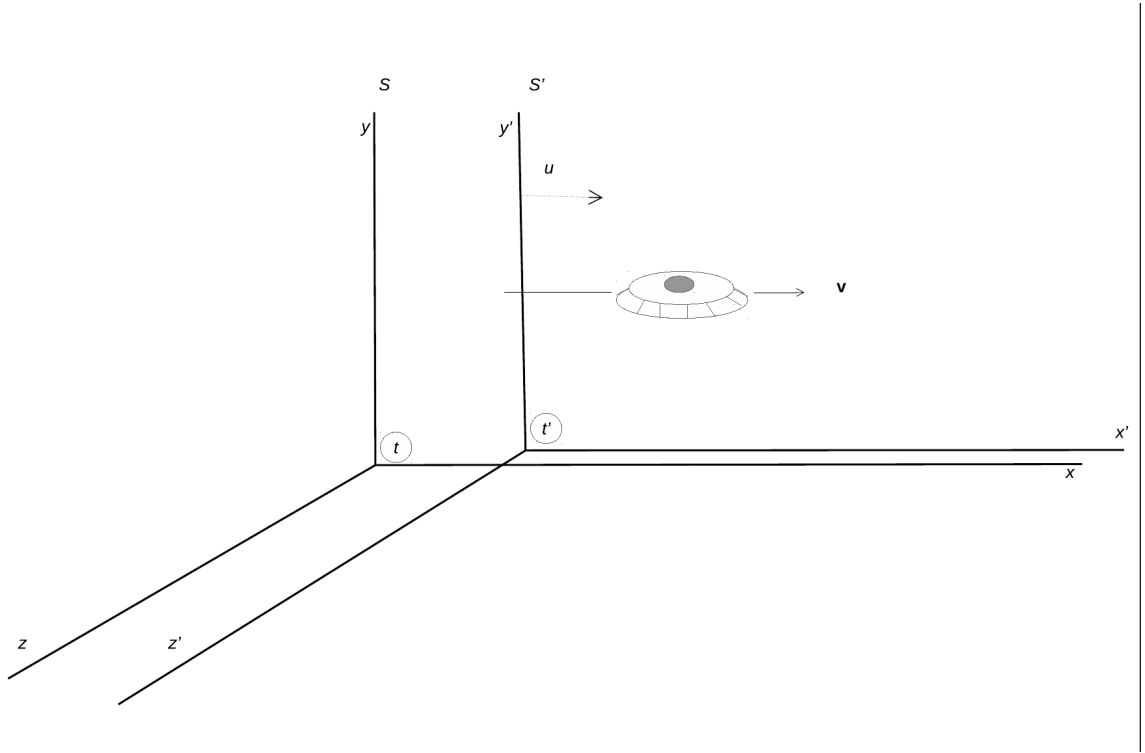


Figura 1: Sistemas inerciais de referência S e S' . O sistema S' tem velocidade constante u em relação a S . Por simplicidade essa velocidade relativa está na direção x . Os eixos cartesianos de cada referencial estão paralelos uns aos outros e, respectivamente, são descritos pelos sistemas de coordenadas (x, y, z, t) e (x', y', z', t') . Um observador $\mathcal{O}$ em S vê um objeto se deslocando com velocidade v na direção x . Um observador $\mathcal{O}'$ em S' vê o mesmo objeto se deslocando com velocidade v' . Dependendo do tipo de transformações utilizadas (Transformações de Galileu ou Transformações de Lorentz), a relação entre v' e v pode ser escrita de maneiras diferentes.

Esse sistema de equações é comumente denominado Transformações de Galileu. Esse conjunto de transformações de coordenadas descreve o princípio relativístico galileano-newtoniano, que basicamente explicita que se as leis da mecânica se aplicam para o referencial S , então elas também se aplicam para o referencial S' .

As transformações de velocidade, neste caso, são descritas a partir da diferenciação

$$v' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{d(x - ut)}{dt},$$

$$v' = v - u, \quad (3)$$

assumindo aqui que $\mathbf{v}$ está na direção x , como explicita a Fig. 1. Isso leva ao seguinte conjunto de transformações de velocidades:

$$\begin{aligned} v'_x &= v' = v - u, \\ v'_y &= v_y, \\ v'_z &= v_z. \end{aligned} \quad (4)$$

Ou, também

$$\begin{aligned} v_x &= v'_x + u, \\ v_y &= v'_y, \\ v_z &= v'_z. \end{aligned} \quad (5)$$

Note que, em particular, a velocidade da luz c não é um invariante perante Transformações de Galileu. Usando as eqs. (4), fica claro que $c' = c - u$.

A partir das Transformações de Lorentz

No início do século XIX, Fresnel propôs a teoria de que a luz se comporta de maneiras diferentes ao interagir com meios diferentes. Essa proposta incluía em seu bojo a interação da luz com objetos em movimento no denominado “éter luminífero” [3]. O éter luminífero, na concepção de Fresnel, seria o meio material que daria suporte à propagação das ondas eletromagnéticas (e que na época consistia basicamente no entendimento sobre a propagação da própria luz visível). Esse meio permearia todo o espaço e, na teoria de Fresnel, um corpo em movimento, como a Terra, arrastaria o éter exterior, causando portanto alterações na velocidade de propagação da luz na direção do movimento [4]. No entanto, em 1887, o experimento de Michelson e Morley, que visava testar o comportamento do éter ao interagir com corpos em movimento, mostrou que a teoria de Fresnel não era compatível com os resultados observados experimentalmente [5]. Em 1895, Lorentz então propõe suas famosas transformações de coordenadas, tentando salvar a teoria de Fresnel: corpos em movimento no éter se “contraíam”, o que explicaria a incompatibilidade da teoria de Fresnel com os experimentos de Michelson e Morley. Curiosamente, o exercício matemático de Lorentz deixou as equações de Maxwell inalteradas ao se passar de um sistema de referência a outro. Em 1905, Einstein propõe, com a Teoria da Relatividade Restrita, uma perspectiva física mais consistente: (a) a velocidade da luz é invariante sob transformações de coordenadas em sistemas inerciais de referência; (b) as Transformações de Lorentz são válidas, mas (c) o éter luminífero é completamente dispensável. Além disso: (d) não há tempo absoluto, o que indica que há transformações nos intervalos de tempo entre referenciais inerciais. Assim, na relatividade restrita (ou especial), as contrações de comprimento propostas por Lorentz ocorrem não por causa do movimento dos corpos em relação ao éter, mas como consequência natural da relatividade entre sistemas de referência inerciais em movimento um em relação ao outro. O principal ponto da teoria de Einstein é que a invariância da velocidade da luz explica satisfatoriamente o comportamento da teoria eletromagnética de Maxwell para os referenciais inerciais S e S' da Fig. 1, sob Transformações de Lorentz. De fato, é possível mostrar que as Transformações de Galileu, eqs. (2), não preservam a forma das equações de Maxwell.

Usando a perspectiva ilustrada na Fig. 1, use o fato de que $x = ut$ quando $x' = 0$. Assumindo que x' é proporcional a $x - ut$, pode-se escrever $x' = \gamma(x - ut)$, com γ uma constante desconhecida a ser determinada. Invertendo o ponto de vista e considerando que S é quem se move com velocidade $-u$ em relação a S' , então a origem $x = 0$ corresponde a $x' = -ut'$. Aqui, x é proporcional a $x' + ut'$ e pode-se escrever $x = \gamma(x' + ut')$. Considerando a propagação de um sinal de luz, e a consideração de que a velocidade da luz é um invariante ($c' = c$), então as duas proporcionalidades acima correspondem a $ct' = \gamma(ct - ut)$ e $ct = \gamma(ct' - ut')$. Isto é,

$$t' = \gamma \left(1 - \frac{u}{c} \right) t, \quad (6)$$

$$t = \gamma \left(1 + \frac{u}{c} \right) t'. \quad (7)$$

Combinando (6) e (7), obtém-se

$$t = \gamma \left(1 + \frac{u}{c} \right) \gamma \left(1 - \frac{u}{c} \right) t,$$

levando à resolução da constante γ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (8)$$

A partir da combinação de $x' = \gamma(x - ut)$ e $x = \gamma(x' + ut')$, chega-se a uma transformação do tipo $t' = t'(x, t)$ e ao seguinte conjunto de transformações

$$\text{Transf. de Lorentz : } \begin{cases} x' = \gamma(x - ut), \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \gamma \left(t - \frac{u}{c^2} x \right). \end{cases} \quad (9)$$

As transformações de velocidade, neste caso, são descritas a partir da diferenciação

$$v' = \frac{dx'}{dt'}. \quad (10)$$

Seja um deslocamento no sistema de referência S' , $\Delta x' = x'_f - x'_i$, e um intervalo de tempo em S' , $\Delta t' = t'_f - t'_i$. Assim, usando as transformações (9), obtêm-se para $\Delta x'/\Delta t'$:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x'}{\Delta t'} &= \frac{x'_f - x'_i}{t'_f - t'_i} = \frac{\gamma(x_f - ut_f) - \gamma(x_i - ut_i)}{\gamma\left(t_f - \frac{u}{c^2}x_f\right) - \gamma\left(t_i - \frac{u}{c^2}x_i\right)} \\ &= \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - u}{1 - \frac{u}{c^2} \frac{\Delta x}{\Delta t}}. \end{aligned}$$

Tomando-se o limite de $v' = dx'/dt' = \lim(\Delta x'/\Delta t')$ para intervalos infinitesimais de espaço e de tempo, tem-se

$$v' = \frac{v - u}{1 - \frac{uv}{c^2}}, \quad (11)$$

assumindo aqui que $\mathbf{v}$ está na direção x , como explicita a Fig. 1. Isso leva ao seguinte conjunto de transformações de velocidades:

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}, \\ v'_y &= \frac{v_y}{\gamma\left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)}, \\ v'_z &= \frac{v_z}{\gamma\left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Ou, também

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{v'_x + u}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}}, \\ v_y &= \frac{v'_y}{\gamma\left(1 + \frac{uv'_x}{c^2}\right)}, \\ v_z &= \frac{v'_z}{\gamma\left(1 + \frac{uv'_x}{c^2}\right)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Note que, segundo essas transformações, a velocidade da luz é um invariante $c' = (c - u)/(1 - uc/c^2) = c$, como já esperado.

Referências

- [1] E.T. Whittaker, *A history of the theories of aether and electricity from the age of Descartes to the close of the nineteenth century* (Hodges, Figgis & Co., Dublin, 1910).
- [2] R. de Andrade Martins, *Caderno Brasileiro de Ensino de Física* **29**, 52 (2012).
- [3] R.S. Menezes Júnior e F.S. Lordelo, *Rev. Bras. Ens. Fis.* **41**, e20180208 (2019).
- [4] A. Fresnel, *Annales de Chimie et de Physique* **9**, 57 (1818).
- [5] A.A. Michelson e E.W. Morley, *American Journal of Science* **34**, 203 (1887).