Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 40, n. 1, 2018

Material Suplementar para "Teorias clássicas de calibre como sistemas com vínculos: um ponto de vista geométrica"

Apêndice A: Cálculos complementares

De acordo com a primeira escolha (32), que traz $\mathcal{Q}^1 = A^0$ e $\mathcal{Q}^2$ como um funcional que depende exclusivamente de $\vec{A}(x) = \left(A^1(x), A^2(x), A^3(x)\right)$, podemos notar que

$$\begin{aligned} \left\{\mathcal{Q}^1(\vec{x}), \mathcal{Q}^1(\vec{y})\right\} &= \left\{\mathcal{Q}^1(\vec{x}), \mathcal{Q}^2(\vec{y})\right\} = \left\{\mathcal{Q}^2(\vec{x}), \mathcal{Q}^2(\vec{y})\right\} \\ &= \left\{\mathcal{Q}^1(\vec{x}), \mathcal{P}_2(\vec{y})\right\} = \left\{\mathcal{Q}^1(\vec{x}), \mathcal{P}_2(\vec{y})\right\} = 0 \ , \end{aligned}$$

assim como

$$\left\{\mathcal{Q}^1(\vec{x}), \mathcal{P}_1(\vec{y})\right\} = \delta(\vec{x}-\vec{y}) \ . \tag{1}$$

Desta maneira, desde que

$$\begin{aligned} \left\{\mathcal{Q}^2(\vec{x}), \mathcal{P}_2(\vec{y})\right\} &= \left\{\mathcal{Q}^2(\vec{x}), \partial_j p_j(\vec{y})\right\} \\ &= \int \frac{\delta\mathcal{Q}^2(\vec{x})}{\delta A^\mu(\vec{x}\,')} \frac{\delta}{\delta p_\mu(\vec{x}\,')} \left[\frac{\partial_j p_j(\vec{y})}{\partial y^j}\right] d\vec{x}\,' \\ &- \int \frac{\delta}{\delta A^\mu(\vec{x}\,')} \left[\frac{\partial_j p_j(\vec{y})}{\partial y^j}\right] \frac{\delta\mathcal{Q}^2(\vec{x})}{\delta p_\mu(\vec{x}\,')} d\vec{x}\,' \\ &= -\frac{\partial}{\partial y^j}\left[\frac{\delta\mathcal{Q}^2(\vec{x})}{\delta A^j(\vec{y})}\right] \end{aligned}$$

também precisa ser igual a $\delta(\vec{x}-\vec{y})$, quando notamos que

$$\frac{\delta A^j(\vec{x})}{\delta A^j(\vec{y})} = \delta(\vec{x}-\vec{y}) \ ,$$

é fácil concluir que

$$\begin{aligned} \left\{\mathcal{Q}^2(\vec{x}), \mathcal{P}_2(\vec{y})\right\} &= \delta(\vec{x}-\vec{y}) \\ &\Leftrightarrow \ \frac{\delta\mathcal{Q}^2(\vec{x})}{\delta A^j(\vec{y})} = -\frac{\delta}{\delta A^j(\vec{y})}\left\{\Delta^{-1}\left[\frac{\partial A^j(\vec{x})}{\partial x^j}\right]\right\} \end{aligned}$$

e, portanto, que $\mathcal{Q}^2 = -\Delta^{-1}\partial_j A^j$. Já no caso da segunda escolha (33), ela pode ser obtida tomando a transformação $A'^\mu = P_\mu$ e $P'_\mu = -A^\mu$, que nos leva a um outro par

$$\mathcal{Q}^{2\prime} = \partial_j A^j \quad \text{e} \quad \mathcal{P}'_2 = -\Delta^{-1}\partial_j P_j$$

com campos canonicamente conjugados.